2.8.3 Lineární rovnice s parametrem III

Předpoklady: 2802

Pedagogická poznámka: Hned na začátku prvního příkladu se dohodneme, že příklady se zlomky se příliš neliší od předchozích. Jediný rozdíl je v tom, že na začátku musíme zapsat podmínky a na konci (kdy už víme, jak vypadá pro jednotlivé hodnoty parametru řešení) zkontrolovat jejich platnost.
Naprostá většina problémů pramení z toho, že studenti si zapíší příklad nepřehledně a přestanou se orientovat v tom, co vlastně vyšlo a pro co mají kontrolovat podmínky.

Př. 1: Vyřeš rovnici $\frac{t}{x-2}=\frac{2}{x-t}$ s neznámou *x* a parametrem *t*.

$\frac{t}{x-2}=\frac{2}{x-t}$ - rovnice obsahuje zlomky, ještě před začátkem výpočtu musíme napsat podmínky: $x-2\neq 0\Rightarrow x\neq 2$ $\quad$ $x-t\neq 0\Rightarrow x\neq t$
Ještě nevíme, co to přesně znamená, protože neznáme výsledky. Až je budeme znát musíme podmínky zkontrolovat. Teď už můžeme násobit a zlikvidovat zlomky.

$$\frac{t}{x-2}=\frac{2}{x-t}\quad /\cdot(x-2)(x-t)$$
$$t(x-t)=2(x-2)$$
$$xt-t^2=2x-4$$
$$xt-2x=t^2-4$$
$$x(t-2)=(t-2)(t+2)$$

Chceme vydělit rovnici výrazem $(t-2)$ a nesmíme dělit nulou. $\Rightarrow$ Kdy je výraz $(t-2)$ roven nule: $(t-2)=0\Rightarrow t=2$. Pokud chceme dělit, musíme dvojku vyloučit.

$\Rightarrow$ **rozvětvení**

$t\neq 2$ $\Rightarrow$ můžeme vydělit rovnici výrazem $(t-2)$, protože se určitě nebude rovnat nule: $x(t-2)=(t-2)(t+2)\quad /:(t-2)$ $x=\frac{(t-2)(t+2)}{t-2}$ $x=t+2$ $\quad$ $K=\{t+2\}$	$t=2$ $\Rightarrow$ nemůžeme dělit, dosadíme $\Rightarrow$ $x(2-2)=(2-2)(2+2)$ $x.0=0$ $\Rightarrow$ můžeme dosadit cokoliv $\Rightarrow$ $K=R$,
Kontrola podmínek: Podmínka: $x\neq t$, hodnota *x* se nesmí rovnat aktuální hodnotě *t* $\Rightarrow$ Zjistíme, kdy se to rovná, a vyloučíme takové *t*. Hledáme $x=t+2=t$ $t+2=t$ $2=0$ - nenastane nikdy. Podmínka $x\neq 2$. Zjistíme pro které *t* by se *x* rovnalo 2.	**Kontrola podmínek:** Podmínka: $x\neq t$, platí $2=t\neq x\Rightarrow x\neq 2$. $\Rightarrow$ $K=R-\{2\}$ Podmínka: $x\neq 2$ $\Rightarrow$ $K=R-\{2\}$ (obě podmínky vylučují stejnou hodnotu *x*).

$x = t+2 = 2$ $t+2 = 2$ $t = 0$ - teď vznikla nová řádka do závěrečného přehledu. Když bude parametr $t = 0$, můžeme vypočítat x způsobem pro $t \neq 2$, ze vztahu $x = t+2$, ale vyjde hodnota zakázaná podmínkou na začátku příkladu. $x = t+2 = 0+2 = 2$, ale má platit $x \neq 2$. Pro $t = 0$ tedy nemáme žádné správné řešení.	

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *p*:	**Řešení pro *x*:**
$t \neq 2; 0$	$K = \{t+2\}$
$t = 0$	$K = \emptyset$
$t = 2$	$K = R - \{2\}$

Př. 2: Vyřeš rovnici $\frac{3x}{x+2} = \frac{t}{t-1}$ s neznámou *x* a parametrem *t*.

$\frac{3x}{x+2} = \frac{t}{t-1}$ Rovnice obsahuje zlomky, ještě před začátkem výpočtu musíme napsat podmínky: $x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$ $\quad t-1 \neq 0 \Rightarrow t \neq 1$

Ještě nevíme, co přesně znamená první podmínka, protože neznáme výsledky, až je budeme znát, musíme podmínku zkontrolovat.

Druhá podmínka znamená, že pro $t = 1$ rovnici nebudeme vůbec řešit a tedy $K = \emptyset$.

Teď už můžeme násobit a zlikvidovat zlomky.

$$\frac{3x}{x+2} = \frac{t}{t-1} \quad / \cdot (x+2)(t-1)$$

$$3x(t-1) = t(x+2)$$

$$3tx - 3x = tx + 2t$$

$$2tx - 3x = 2t$$

$$x(2t-3) = 2t$$

Chceme vydělit rovnici výrazem $(2t-3)$ a nesmíme dělit nulou. $\Rightarrow$ Kdy je výraz $(2t-3)$ roven nule: $(2t-3) = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$. Pokud chceme dělit, musíme $\frac{3}{2}$ vyloučit.

$\Rightarrow$ **rozvětvení.**

$t \neq 1; \frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ můžeme vydělit rovnici výrazem $(2t-3)$, protože se určitě nebude rovnat nule: $x(2t-3) = 2t \quad / : (2t-3)$ $x = \frac{2t}{2t-3}$ $\qquad K = \left\{\frac{2t}{2t-3}\right\}$ **Kontrola podmínek:** Podmínka $x \neq -2$. Zjistíme, pro které *t* by se *x* rovnalo -2.	$t = \frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ nemůžeme dělit, dosadíme $\Rightarrow$ $x\left(2\frac{3}{2} - 3\right) = 2\frac{3}{2}$ $x.0 = 3$ neplatí nikdy $\Rightarrow$ $K = \emptyset$ (stejný výsledek jako pro $t = 1$) **Kontrola podmínek:** nemá smysl, když nemáme žádné řešení

$x=\frac{2t}{2t-3}=-2$

$\frac{2t}{2t-3}=-2 \quad /(2t-3)$

$2t=-2(2t-3)$

$2t=-4t+6$

$6t=6$

$t=1$ - teď jsme získali další hodnotu parametru, pro který rovnice nemá řešení. Tato hodnota je shodná s hodnotou parametru, kterou jsme vyloučili už na začátku příkladu při stanovení podmínek pro odstraňování zlomků.

$t=1 \quad \Rightarrow \quad K=\emptyset$ (zjištěno už podruhé)

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *p*:	**Řešení pro *x*:**
$t\neq 1;\frac{3}{2}$	$K=\left\{\frac{2t}{2t-3}\right\}$
$t=1;\frac{3}{2}$	$K=\emptyset$

Dodatek: To, že z podmínky pro *t* na pravé straně vyplývá stejná hodnota parametru *t* jako z podmínky pro *x* na levé straně, není náhoda. Vyjde to stejně pro všechny rovnice ve tvaru $\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{At+B}{Ct+D}$. Zdůvodnění můžete nechat jako bonusový úkol pro nejlepší studenty.

Na rovnici $\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{At+B}{Ct+D}$ se můžeme dívat jako na rovnost předpisů dvou lineárních lomených funkcí. Obě mají být stejné (o čemž se můžeme přesvědčit dosazením výrazu pro *x* do levé strany rovnice, po úpravě získáme stejný výraz jako na pravé straně), musí mít stejnou i hodnotu, pro kterou nejsou definované, což je přesně hodnota vyloučeného parametru *t*.

Př. 3: Vyřeš rovnici $\frac{(2x-1)(2t-2)}{x-1}=t+1$ s neznámou *x* a parametrem *t*.

$\frac{(2x-1)(2t-2)}{x-1}=t+1$ Rovnice obsahuje zlomky, ještě před začátkem výpočtu musíme napsat podmínky: $x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 1$.

Ještě nevíme, co přesně znamená podmínka, protože neznáme výsledky. Až je budeme znát, musíme podmínku zkontrolovat.

Teď už můžeme násobit a zlikvidovat zlomky.

$\frac{(2x-1)(2t-2)}{x-1}=t+1 \quad /\cdot(x-1)$

$(2x-1)(2t-2)=(t+1)(x-1)$

$$4tx-4x-2t+2=tx-t+x-1$$
$$3tx-5x=t-3$$
$$x(3t-5)=t-3$$

Chceme vydělit rovnici výrazem $(3t-5)$ a nesmíme dělit nulou. $\Rightarrow$ kdy je výraz $(3t-5)$ roven nule: $(3t-5)=0 \Rightarrow t=\frac{5}{3}$. Pokud chceme dělit, musíme $\frac{5}{3}$ vyloučit.

$\Rightarrow$ **rozvětvení**

$t\neq\frac{5}{3}$ $\Rightarrow$ můžeme vydělit rovnici výrazem $(3t-5)$, protože se určitě nebude rovnat nule: $x(3t-5)=t-3 \quad /:(3t-5)$ $x=\frac{t-3}{3t-5}$ $\qquad K=\left\{\frac{t-3}{3t-5}\right\}$	$t=\frac{5}{3}$ $\Rightarrow$ nemůžeme dělit, dosadíme $\Rightarrow$ $x\left(3\frac{5}{3}-5\right)=\frac{5}{3}-3$ $x(5-5)=-\frac{4}{3}$ $x.0=-\frac{4}{3}$ neplatí nikdy $\Rightarrow$ $K=\emptyset$ (stejný výsledek jako pro $t=1$)
Kontrola podmínek: Podmínka $x\neq 1$. Zjistíme pro které *t* by se *x* rovnalo 1. $x=\frac{t-3}{3t-5}=1$ $\frac{t-3}{3t-5}=1 \quad /\cdot(3t-5)$ $t-3=3t-5$ $2=2t$ $t=1$ Teď jsme získali hodnotu parametru, pro který rovnice nemá řešení. $t=1 \quad \Rightarrow \quad K=\emptyset$ (zjištěno už podruhé)	**Kontrola podmínek:** Nemá smysl, když nemáme žádné řešení.

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *p*:	**Řešení pro *x*:**
$t\neq 1;\frac{5}{3}$	$K=\left\{\frac{t-3}{3t-5}\right\}$
$t=1;\frac{5}{3}$	$K=\emptyset$

Př. 4: Vyřeš rovnici $xp^2+4xq^2=p^2-4q^2$ s neznámou *x* a parametry *p* a *q*.

$$xp^2+4xq^2=p^2-4q^2$$
$$x\left(p^2+4q^2\right)=p^2-4q^2$$

Chceme vydělit rovnici výrazem $\left(p^2+4q^2\right)$, což může být problém, protože se nesmí dělit nulou. $\Rightarrow$ Zjistíme, zda je výraz $\left(p^2+4q^2\right)$ někdy roven nule. Jde o součet druhých mocnin (tedy nezáporných čísel) $\Rightarrow$ je nula pouze, když jsou obě čísla nulová. Pokud chceme dělit, musíme vyloučit možnosti $(p;q)=(0;0)$, abychom nedělili nulou.

$\Rightarrow$ **rozvětvení**

Když $(p;q)\neq(0;0)$, můžeme vydělit rovnici výrazem p^2+4q^2, protože se určitě nebude rovnat nule: $x\left(p^2+4q^2\right)=p^2-4q^2 \quad /:\left(p^2+4q^2\right)$ $x=\dfrac{p^2-4q^2}{p^2+4q^2}$ $\quad K=\left\{\dfrac{p^2-4q^2}{p^2+4q^2}\right\}$	Když $(p;q)=(0;0)$ nemůžeme vydělit výrazem $\left(p^2+4q^2\right)$, ale můžeme dosadit $\Rightarrow$ $x\left(p^2+4q^2\right)=p^2-4q^2$ $x\left(0^2+4\cdot0^2\right)=0^2-4\cdot0^2$ $x\cdot0=0 \quad \Rightarrow$ pro $(p;q)=(0;0)$ jsou řešením všechna reálná čísla $\Rightarrow$ $K=R$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *p*:	**Řešení pro *x*:**
$(p;q)\neq(0;0)$	$K=\left\{\dfrac{p^2-4q^2}{p^2+4q^2}\right\}$
$(p;q)=(0;0)$	$K=R$

Př. 5: Vyřeš rovnici $p^2x-q^2x=p+q$ s neznámou *x* a parametry *p* a *q*.

$p^2x-q^2x=p+q$

$x\left(p^2-q^2\right)=p+q$

$x(p-q)(p+q)=p+q$

Chceme vydělit rovnici výrazem $(p-q)(p+q)$, což může být problém, protože se nesmí dělit nulou. $\Rightarrow$ Zjistíme, zda je výraz $(p-q)(p+q)$ někdy roven nule. Jde o součin dvou závorek, když je jedna nulová je nulový i součin $\Rightarrow$ $(p-q)=0\Rightarrow p=q$ a $(p+q)=0\Rightarrow p=-q$. Pokud chceme dělit, musíme vyloučit možnosti $p=\pm q$, abychom nedělili nulou.

$\Rightarrow$ **rozvětvení na tři větve** (vedle sebe se nevejdou, proto píšeme pod sebe).

Když $p\neq\pm q$, můžeme vydělit rovnici výrazem $(p-q)(p+q)$, protože se určitě nebude rovnat nule:

$x(p-q)(p+q)=p+q \quad /:(p-q)(p+q)$

$x=\dfrac{p+q}{(p-q)(p+q)}$

$x=\dfrac{1}{p-q} \qquad K=\left\{\dfrac{1}{p-q}\right\}$

Když $p=-q\Leftrightarrow q=-p$ nemůžeme vydělit výrazem $(p-q)(p+q)$, ale můžeme dosadit $\Rightarrow$

$x(p-q)(p+q)=p+q$

$x(p+p)(p-p)=p-p$

$x(2p)\cdot0=0$

$x \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow$ pro $p = -q$ jsou řešením všechna reálná čísla $\Rightarrow K = R$

Když $p = q$ nemůžeme vydělit výrazem $(p-q)(p+q)$, ale můžeme dosadit $\Rightarrow$

$x(p-q)(p+q) = p+q$

$x(p-p)(p+p) = p+p$

$x \cdot 0 \cdot (2p) = 2p$

$x \cdot 0 = 2p$

Levá strana je rovna nule pro každé *x*, u pravé strany jsou dvě možnosti:

$p \neq 0 \quad \Rightarrow$ pravá strana je různá od nuly $\Rightarrow K = \emptyset$.

$p = 0 \quad \Rightarrow$ pravá strana se rovná nule $\Rightarrow K = R$.

(jde o možnost diskutovanou u podmínky $p = -q \Leftrightarrow q = -p$, protože když se $p = 0$ a $p = q$, pak i $q = 0$ a potom platí i $p = -q$ $(0 = -0)$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *p*:	**Řešení pro *x*:**
$p \neq \pm q$	$K = \left\{ \frac{1}{p-q} \right\}$
$p = -q \Leftrightarrow q = -p$	$K = R$
$p = q$ a zároveň $p \neq 0$	$K = \emptyset$

Př. 6: Petáková:
strana 21/cvičení 5 a) c)

Shrnutí: Pokud původní rovnice obsahuje zlomky, musíme zapsané podmínky zkontrolovat v každé z cest řešení rovnice.